
Contrôle continu 4

Exercice 1 (4 pt). Considérons les deux sous-ensembles de $M_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$V = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer les dimensions de V et W .
3. Est-ce que V et W sont supplémentaires ?
4. Soit $S \subset M_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices A telles que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A (pour une valeur propre quelconque, *qu'on ne fixe pas*). Est-il un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?

Solution.

1. On montre que V est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, l'argument pour W est similaire. On note d'abord que V est non vide, car il contient la matrice nulle $\mathbf{0}_{2,2}$. Ensuite, si $A, B \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule

$$(A + \lambda \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

par la distributivité du produit matriciel. Alors V est stable par la somme et par le produit avec un scalaire, et on conclut que V est un sous-espace vectoriel.

2. Explicitement, les matrices contenues dans V sont de la forme $\begin{pmatrix} a & -2a \\ c & -2c \end{pmatrix}$ avec $a, c \in \mathbb{R}$ et les matrices contenues dans W sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Il suit que

$$V = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right), \quad W = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right).$$

Dans tous les deux cas, les deux vecteurs générateurs ne sont pas colinéaires et forment donc une base. Par conséquent, $\dim(V) = \dim(W) = 2$.

3. V et W sont supplémentaires ssi $\dim(V) + \dim(W) = \dim(M_2(\mathbb{R}))$ (évident) et $V \cap W = \{\mathbf{0}_{2,2}\}$. On voit que $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in V \cap W$, alors ils ne sont pas supplémentaires.
4. On essaie de vérifier les conditions :

- S est non vide : $\mathbf{0}_{2,2} \in S$ car $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre 0 de $\mathbf{0}_{2,2}$.
- Supposons que $A, B \in S$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et considérons la matrice $A + \beta \cdot B$. On calcule

$$(A + \beta B) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il suit que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre $\lambda + \beta\mu$ de $(A + \beta B)$, alors $(A + \beta B) \in S$.

S est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice 2 (6 pt). Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que A n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
2. Trouver une matrice inversible $P \in M_2(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{C})$ telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

3. Calculer A^{2022} et A^{2023} .

Solution.

1. $P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 5 \\ -2 & -3-X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Ce polynôme n'admet pas de racines dans \mathbb{R} , alors A n'est pas diagonalisable.
2. Bien sûr les valeurs propres de A sont $\lambda_{\pm} = \pm i$. On calcule l'espace propre de valeur propre i :

$$E_i = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3+i \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice A étant réelle, $E_{-i} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3-i \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est engendré par la conjuguée complexe.

On conclut que $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le théorème de Cayley–Hamilton, $A^2 = -I_2$. Il suit que

$$A^{2022} = (-I_2)^{1011} = -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{2023} = A^{2022} \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (4 pt). Soit $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ l'espace vectoriel de polynômes d'ordre ≤ 2 et considérons l'application

$$\Psi: \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[X]; \quad \Psi(P)(X) = P''(2) \cdot (X^2 + 1) + P'(1) \cdot (X + 1) + P(0) \cdot (X^2 + X).$$

1. Montrer que Ψ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$.
3. Calculer le déterminant de Ψ . L'application linéaire Ψ est-elle un isomorphisme ?

Solution.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \Psi(P + \lambda Q)(X) &= (P + \lambda Q)''(2) \cdot (X^2 + 1) + (P + \lambda Q)'(1) \cdot (X + 1) + (P + \lambda Q)(0) \cdot (X^2 + X) \\ &= (P''(2) + \lambda Q''(2)) \cdot (X^2 + 1) + (P'(1) + \lambda Q'(1)) \cdot (X + 1) + (P(0) + \lambda Q(0)) \cdot (X^2 + X) \\ &= P''(2) \cdot (X^2 + 1) + P'(1) \cdot (X + 1) + P(0) \cdot (X^2 + X) \\ &\quad + \lambda Q''(2) \cdot (X^2 + 1) + \lambda Q'(1) \cdot (X + 1) + \lambda Q(0) \cdot (X^2 + X) \\ &= \Psi(P)(X) + \lambda \Psi(Q)(X) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivée et distributivité du produit des polynômes. Alors Ψ est linéaire.

2. Soient $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2$. Alors on calcule

$$\Psi(P_0)(X) = X + X^2 \quad \Psi(P_1)(X) = 1 + X \quad \Psi(P_2)(X) = 2(X^2 + 1) + 2(X + 1) = 4 + 2X + 2X^2$$

d'où la matrice

$$M(\Psi)_{(1,X,X^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $\det(\Psi) = \det(M(\Psi)_{(1,X,X^2)}) = -4$. Le déterminant est non nul, alors Ψ est un isomorphisme.

Exercice 4 (6 pt).

1. Montrer que les trois vecteurs suivants forment une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pour les trois vecteurs de la base canonique $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, calculer leurs composantes dans la base \mathcal{B} .

3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec les trois propriétés suivantes :

(a) \vec{u} est un vecteur propre de valeur propre -1 .

(b) \vec{v} est un vecteur propre de valeur propre 2 .

(c) $\Phi(\vec{w}) = (-3, -1, -1)$.

4. En utilisant partie (2), montrer que la matrice de Φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer la troisième valeur propre de Φ , ainsi que l'espace propre associé.

(Indication : il est possible de déterminer la troisième valeur propre sans calcul du polynôme caractéristique.)

Solution.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ est non nul. Par conséquent, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre de vecteurs dans \mathbb{R}^3 et donc une base.

2. Soit par Gauss, soit par essai :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{w}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}.$$

3. Parce que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment une base de \mathbb{R}^3 , on a un isomorphisme

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \quad \Psi \longmapsto (\Psi(\vec{u}), \Psi(\vec{v}), \Psi(\vec{w})).$$

Il existe alors une unique application linéaire $\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$\Phi(\vec{u}) = -\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Phi(\vec{v}) = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Phi(\vec{w}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. $\Phi(1, 0, 0) = \Phi(\vec{w}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$$\Phi(0, 1, 0) = \Phi(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = -\Phi(\vec{u}) + \Phi(\vec{v}) + \Phi(\vec{w}) = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0, 0, 1) = \Phi(2\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}) = 2\Phi(\vec{u}) - \Phi(\vec{v}) - 2\Phi(\vec{w}) = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Ψ dans la base canonique est donc $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. On sait que $\text{Tr}(B)$ est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicités). On connaît déjà deux valeurs propres (-1 et 2), alors la troisième est

$$\text{Tr}(B) - (-1) - 2 = -1 - (-1) - 2 = -2.$$

L'espace propre associé est (par Gauss)

$$E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $E_{-2} = \text{Vect}(2, 1, 1)$.